**УДК 519.63**

**ПОСТРОЕНИЕ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ ДЛЯ РАСЧЕТА ИНТЕГРАЛЬНЫХ СОСТАВЛЯЮЩИХ ДВИЖЕНИЯ В ТРЕХМЕРНОЙ МОДЕЛИ ВЕТРОВЫХ ТЕЧЕНИЙ В ВОДОЕМЕ**

**КӨЛМӨНҮН ҮЧ ЧЕНЕМДҮҮ МОДЕЛИНДЕГИ ЖЕЛДЕТИЛГЕН АГЫМДАР КЫЙМЫЛЫНДАГЫ ИНТЕГРАЛДЫК КУРАМДАРДЫ ЭСЕПТӨӨ ҮЧҮН АЙРЫМАЛУУ СХЕМАНЫ ИЗИЛДӨӨ ЖАНА ИШТЕП ЧЫГУУ**

**DEVELOPMENT OF DIFFERENCE SCHEME FOR CALCULATION INTEGRAL PARTS OF MOTION IN THE THREE-DIMENSIONAL WIND FLOWS MODEL**

**Турдушев И.А.**

**Turdushev I.A.**

Разработан новый численный метод для определения интегральных составляющих вектора скорости. Проведены сравнительные численные эксперименты, демонстрирующие его эффективность.

*Ключевые слова:* математическое моделирование, гидродинамика водоемов, интегральная (баротропная) компонента, проекционный вариант интегро-интерполяционного метода.

A new numerical method for calculation integral parts of velocity vector was developed. Comparative numerical experiments that demonstrated efficiency of the numerical method were performed.

*Key words:* mathematical modeling, hydrodynamics of reservoirs, integral (barotropic) component, projective variant of integro-interpolation method.

**Введение.** Общепринятый метод расчета скорости течений в задачах циркуляции жидкости в водоеме использует представление вектора горизонтальной скорости в виде суммы баротропной (интегральной) и бароклинной составляющих [1]. В работе [2] предлагается разностная схема для вычисления баротропной составляющей вектора скорости. Построение разностной схемы в [2] производится в два этапа. На первом этапе решаемая задача аппроксимируется по времени. При этом получается следующая система дифференциальных уравнений, которую необходимо решать на каждом шаге по времени:



где  и  – компоненты баротропной составляющей; , , , ,  и  – известные достаточно гладкие функции; ,  – координаты единичного вектора внешней нормали к границе  области . На втором этапе задача аппроксимируется по пространственным переменным. При этом используется проекционный вариант интегро-интерполяционного метода (ПВИИМ), подробно изложенный в работах [3, 4]. При численной реализации разностной схемы в [2] производные функций *f* и *g*, стоящие в правой части , рассчитываются с использованием формул численного дифференцирования. Данная операция может вносить ошибку, которая накапливается на каждом шаге по времени.

В настоящей работе предлагается новая разностная схема для численного решения задачи , которая не требует на каждом шаге по времени производить численное дифференцирование.

Результаты, изложенные в данной работе, обсуждались на V конгрессе математиков тюркского мира [5] (Кыргызстан, Булан-Соготту, 5-7 июня, 2014 год).

**Разностная схема для задачи** . Для построения разностной схемы используем ПВИИМ (см. [3, 4]). В области  рассмотрим прямоугольную, вообще говоря, неравномерную сетку, пусть  – ее произвольная ячейка. Умножим первое уравнение системы на некоторую, пока произвольную функцию , второе уравнение – на произвольную функцию , результаты сложим и проинтегрируем по ячейке , в том числе и по частям. В итоге приходим к интегральному тождеству:



Тестовые функции  будем выбирать так, чтобы они в  удовлетворяли системе уравнений



с постоянными коэффициентами , аппроксимирующими в  функции - соответственно. Рассмотрим два варианта выбора функций . Пусть  - некоторая, достаточно гладкая и пока произвольная функция. Положим:



тогда первое уравнение в будет выполнено для любой функции . Удовлетворяя второму уравнению в , получим условие для выбора :



Второй вариант выбора тестовых функций основан на представлении:

.

В этом случае второе уравнение в будет выполнено автоматически. Первому уравнению в функции будут удовлетворять при выполнении условия . Легко построить четыре линейно независимых решения уравнения , обращающихся в единицу в одной из вершин ячейки  и в ноль – во всех остальных. Для этого каждому горизонтальному ребру сетки  поставим в соответствие пару функций , являющихся решением задачи:



Пусть вертикальным ребрам  отвечают решения  задачи:



Здесь приняты обозначения:



и аналогичные для *a* и *b*.

Теперь на прямоугольнике  определим четыре функции:



Очевидно, что  является решением (в ) уравнения



и удовлетворяет условиям:



 для .

Введем несколько дополнительных обозначений:







Восемь пар тестовых функций  после этого находим из соотношений и . Подставляя эти тестовые функции в тождество , мы автоматически избавляемся от главного интегрального слагаемого в его левой части, затем, аппроксимируя оставшиеся одномерные интегралы, в итоге получаем систему разностных уравнений для определения приближенных значений функций *u* и *v* в узлах сетки. Перед аппроксимацией интеграла, стоящего в правой части , производится его интегрирование по частям, чтобы производные с функций *f* и *g* перебросить на функции . Таким образом, нам не нужно будет производить численное дифференцирование функций *f* и *g*. Опуская технические детали, выпишем итоговую систему разностных соотношений.





где . В случае, когда *i* таково, что мы выходим на левую вертикальную границу, уравнения будут использоваться как разностные уравнения в узлах левой вертикальной границы для определения функции , которая там не задана. Отметим, что правые части в в этом случае определены в силу граничных условий на .



В случае выхода на правую вертикальную границу уравнения используются как граничные уравнения для определения , при этом значения  на вертикальных границах известны из краевых условий.

Уравнения для определения  во внутренних точках области теперь получаются после сложения и , при этом значения  окончательно исключаются:



где  Окончательно, для определения  получаем систему из уравнений – во внутренних точках области, и – на вертикальных границах (при соответствующих значениях *i*), а также сюда добавляются граничные значения  на горизонтальных границах, которые известны, в силу условий .

Строя аналогичным образом задачу для определения функции , в итоге получаем разностную схему, которая может быть использована для численного решения системы и определения баротропных компонент скорости в моделях гидродинамики глубоководных бассейнов.

**Численные эксперименты.** Для демонстрации работы построенной разностной схемы приведем результаты расчетов для тестовой задачи из работы [6]. Результаты разработанной разностной схемы сравнивались с результатами разностной схемы, построенной в работе [2]. Численные эксперименты проводились при следующих значениях параметров задачи из [6]:



Относительная погрешность вычислялась по формуле:



где  - точное и приближенное решения соответственно. Разностные схемы тестировались при различных значениях *N* и *M* – количество узлов сетки по направлениям *x* и *y*, соответственно, и  – шаг по времени.

Далее приведены результаты решения тестовой задачи с использованием схемы из работы [2]. Параметры схемы заданы следующим образом: . На рисунке 1 приведены графики поведения погрешностей для функций  (красный график) и  (зеленый график) при значениях параметров численного метода . По оси абсцисс идет время, а по оси ординат– погрешность. На рисунке 2 приведены графики поведения погрешностей при значениях параметров .

|  |  |
| --- | --- |
| Рисунок 1 – Поведение погрешностей при . | Рисунок 2 – Поведение погрешностей при . |

На рисунках 3 и 4 приведены графики поведения погрешностей при решении тестовой задачи с использованием схемы, разработанной в данной работе.

|  |  |
| --- | --- |
| Рисунок 3 – Поведение погрешностей при . | Рисунок 4 – Поведение погрешностей при . |

Также численные эксперименты были проведены при значениях параметров схем  и . В таблице 1 приведены максимальные погрешности вычисления функций *u* и *v* с использованием схемы из [2] и разработанной разностной схемы.

Таблица 1 – Максимальные погрешности вычисления функций *u* и *v*.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Параметры схемы | Схема из работы [2] | | Разработанная схема | |
| *Error(u)*, % | *Error(v)*, % | *Error(u)*, % | *Error(v)*, % |
|  | 30 | 47 | 8 | 12 |
|  | 15 | 21 | 7 | 5 |
|  | 14 | 11 | 11 | 8 |
|  | 16 | 14 | 14 | 13 |

Анализируя данные таблицы 1, заключаем, что разработанная разностная схема точнее, чем схема работы [2]. При этом погрешность разработанной схемы значительно ниже при небольшом числе узлов пространственной сетки (*N*=20, *M*=20 и *N*=40, *M*=40). Если же число узлов увеличивать, то разработанная разностная схема точнее на 1-3%.

**ЛИТЕРАТУРА**

1. Марчук Г.И., Саркисян А.С. Математическое моделирование циркуляции океана. – Москва: Наука, 1988. – 302 с.
2. Skliar S.N., Rylov M.A. Computing of barotropic components of motion in problems of water circulation in reservoir. *Study of the Issyk-Kul lake hydrodynamics with the use of isotopic methods,* ISTC, Bishkek, Ilim, 2006, Part-II, P. 21-30.
3. Еремеев В.Н., Кочергин В.П., Кочергин С.В., Скляр С.Н. Математическое моделирование гидродинамики глубоководных бассейнов. – Севастополь: «ЭКОСИ-Гидрофизика», 2002. – 238 с.
4. Скляр С.Н. О дискретизации задач с пограничным слоем при помощи одного проекционного варианта метода интегральных тождеств. I. Несамосопряженное уравнение, первая краевая задача // Изв. АН Киргизской ССР. Физ.-техн. и матем. науки. – 1988. – № 4. – С. 10-23; II. Несамосопряженное уравнение, третья краевая задача // Там же, – 1989. – № I. – С. 3-10. III. Самосопряженное уравнение // Там же, – 1989. – № 4. – С. 3-11.
5. Turdushev I., Skliar S. (2014) On calculation of integral parts of motion in the three-dimensional wind flows model. *Abstracts of V Congress of the Turkic World Mathematicians* (Kyrgyzstan, Bulan-Sogottu, 5-7 June, 2014) / Ed. A.Borubaev. Bishkek: Kyrgyz Mathematical Society. – P. 257.
6. Турдушев И.А., Скляр С.Н. Аналитические решения для трехмерной модели ветровых течений в водоеме / Актуальные проблемы теории управления, топологии и операторных уравнений: Материалы второй международной юбилейной конференции, посвященной 20-летию образования Кыргызско-Российского Славянского Университета (КРСУ) им. первого президента Б.Н Ельцина и 100-летию профессора Якова Васильевича Быкова. Санаторий «Иссык-Куль Аврора»: 5-7 сентября 2013 года / Под общ. ред. проф. А.К. Керимбекова. – Бишкек: Изд-во Maxprint. Том 2. – С. 214-218.

***Турдушев Ильяр Абдулмажитович***, аспирант кафедры Прикладной математики и информатики Кыргызско-Российского Славянского Университета

***Мобильный телефон****:* 0 555 63 91 44; ***E-mail****:* [iliar.turdushev@gmail.com](mailto:iliar.turdushev@gmail.com)